

Zadania dla MEK01

1. Sprawdzić, czy podane krzywe są regularne i sparametryzowane łukowo. Wyznaczyć krzywiznę, skręcenie i reper Freneta:

a) $\gamma(t) = (\frac{1}{3}(1+t)^{1.5}, \frac{1}{3}(1-t)^{1.5}, 2^{-0.5}t),$

b) $\gamma(t) = ((2 + \cos t) \cos \pi t, (2 + \cos t) \sin \pi t, \sin t).$

2. Wykazać, że krzywa $\gamma(s) = (\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ jest uogólnioną linią śrubową, ale nie jest linią śrubową.

Zadania dla MEK02

3. Wykazać, że krzywa $\gamma(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})$ leży w pewnej płaszczyźnie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć równanie tej płaszczyzny.

4. Sprawdzić, że krzywa $\gamma(t) = (\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, 2 - \frac{3}{5} \cos t)$ jest zawarta w pewnym okręgu. Znaleźć środek i promień tego okręgu oraz płaszczyzny, w której leży.

Zadania dla MEK03

5. Sprawdzić, dla jakich $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ powierzchnia $x(u, v) = (u, v, uv)$ jest regularna. Wyznaczyć operator kształtu tej powierzchni. Pokazać, że jest ona prostokreślna oraz obliczyć krzywizny główne w punkcie $x(0, 0)$.

6. Obliczyć krzywiznę Gaussa dowolnego punktu powierzchni

$$x(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2).$$

Zadania dla MEK03

7. Sklasyfikować punkty powierzchni

$$x(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2).$$

8. Wyznaczyć długość krzywej będącej obrazem odcinka łączącego punkty $(1, 1)$ i $(2, 4)$ poprzez parametryzację, jeśli pierwsza forma fundamentalna powierzchni jest dana wzorem $ds^2 = u^2 du^2 + 3du dv + 2v^2 dv^2$.