FUNKCJE RZECZYWISTE II - ZADANIA

1. Pokazać, że funkcja $f(x) = arc\,tg\,x$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

2. Udowodnić, że jeśli $f_n \to f$ według miary m w E i E_0 jest m-mierzalnym podzbiorem zbioru E, to $f_n \to f$ według miary w E_0.

3. Niech $f_n(x) = x^{-n}$ dla $n = 1, 2, ...,$ $x \in [1, \infty)$. Sprawdzić, czy ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny według miary Lebesgue'a.

4. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Niech $f(x) = [e^x]$ dla $x \in E = [0, \ln n]$. Obliczyć z definicji całkę
$$\int\limits_E f dm_1.$$

5. Niech C oznacza zbiór Cantora. Określamy funkcję $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ następująco:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ n, & \text{na każdym usuniętym przedziale otwartym o długości } \frac{1}{3^n} \end{cases}.$$
Obliczyć całkę
$$\int\limits_{[0,1]} f dm_1.$$