

FUNKCJE RZECZYWISTE I - ZADANIA

1. Obliczyć granicę górną i granicę dolną ciągu zbiorów $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie

$$A_n = \begin{cases} [0, 1] \cap \mathbb{Q} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ (0, 1/n] & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$

2. Udowodnić, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są wstępującymi ciągami zbiorów, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right).$$

3. Niech m będzie miarą skończenie addytywną określoną na ciele $\mathcal{A}$ pewnych podzbiorów zbioru X . Pokazać, że dla dowolnych zbiorów $A, B \in \mathcal{A}$ zachodzi równość

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

4. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ rodzinę tych wszystkich podzbiorów A zbioru X , że albo A jest co najwyżej przeliczalny albo A' jest co najwyżej przeliczalny. Wykazać, że rodzina $\mathcal{A}$ jest σ -ciałem. Dla $A \in \mathcal{A}$ przyjmijmy

$$m(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest co najwyżej przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } A' \text{ jest co najwyżej przeliczalny} \end{cases}.$$

Pokazać, że m jest miarą.

5. Obliczyć miarę Jordana zbioru $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
6. Obliczyć miarę Lebesgue'a zbioru Cantora.