1. RACHUNEK WEKTOROWY

1. Rozstrzygnąć, czy możliwe jest by wartość sumy dwóch wektorów była równa długości każdego z nich.

2. Dane są wektory: $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{j} - \vec{k}$. Obliczyć:
$\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ oraz $\vec{a} \cdot \vec{b}$

3. Jaki kąt tworzą dwa jednakowe wektory, jeżeli długość ich wypadkowej jest równa długości każdego z nich ?

4. .Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Obliczyć:
$\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ oraz $\vec{a} \times \vec{b}$
.

5. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ oraz $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.
Znaleźć cosinus kąta zawartego między tymi wektorami.

6. Wykazać że: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

7. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
Znaleźć sinus kąta zawartego między tymi wektorami.

8. Wykazać że: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

9. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ oraz $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
Znaleźć $(\vec{a} + \vec{b})$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ oraz określić kąt między tymi wektorami.
Czy równość $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ jest spełniona? W jakich warunkach?

10. Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Obliczyć:
$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ oraz $\vec{a} \times \vec{b}$. Określić kierunek i zwrot wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i kąt zawarty między nimi.

11. Dane są wektory: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Obliczyć:
$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}|$. Czy te wektory są do siebie prostopadłe.Podać uzasadnienie.

12. Sprawdzić czy $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

13. Dane są wektory: $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$. Obliczyć:
$|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}|$. Czy te wektory leżą na tej samej prostej.Podać uzasadnienie wykonując odpowiednie obliczenia.

14. Dane są wektory: $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|,\ |\vec{a}-\vec{c}|$ oraz $\mathrm{tg}(\vec{a},\vec{b})$

15. Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + b_z\vec{k}$. Obliczyć współrzędną b_z tak, aby wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ były do siebie równoległe.

16. Dane są wektory: $\vec{a} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|,\ |\vec{a}+\vec{b}|$ oraz $\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}\times\vec{c}|$

17. Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Obliczyć wartość współrzędnej a_z aby te wektory były do siebie prostopadłe.

18. Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}|,\ |\vec{b}|,\ |\vec{c}|,\ |\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ oraz $|\vec{b}\times\vec{c}\times\vec{a}|$

19. Dane są wektory: $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + c_y\vec{j}$.

Wyznaczyć wartość współrzędnej c_y tak, aby te wektory utworzyły trójkąt. Ile wynoszą kąty tego trójkąta?

20. Dane są wektory: $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ oraz $\mathrm{tg}(\vec{a},\vec{b})$

21. Dane są wektory: $\vec{a} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ oraz $\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}\times\vec{c}|^2$

22. Dane są wektory: $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Obliczyć: $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ oraz $|\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}| - |\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$

23. Dane są wektory: $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

Obliczyć kąty między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ *oraz* $\vec{b}$ i $\vec{c}$

24. Dane są wektory: $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + 7\vec{j}$.

Sprawdzić, czy wektory te tworzą trójkąt. Obliczyć wartość wyrażenia: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ i porównać z polem trójkąta zbudowanego na tych wektorach ?

25. Wykazać, że wartość bezwzględna iloczynu wektorowego dwóch wektorów daje liczbowo powierzchnię równoległoboku utworzonego z tych wektorów.

2. PRAWA RUCHU W MECHANICE

1. Pojazd przejechał odległość między dwoma punktami A i B w ciągu 1,5 h, jadąc przez czas t_1= 0,5 h z prędkością v_1= 70 km/h i przez t_2 = 1 h z prędkością v_2 = 40 km/h. Obliczyć prędkość średnią pojazdu na całym odcinku drogi.
2. Pojazd poruszający się z punktu A do punktu B połowę czasu jedzie z prędkością v_1= 50 km/h , a drugą połowę czasu z prędkością v_2 = 70 km/h. Obliczyć średnią prędkość na całej drodze od A do B.
3. Motocyklista przejechał pierwszą ćwiartkę drogi z prędkością v_1= 10 m/s, drugą ćwiartkę z prędkością v_2 = 15 m/s, trzecią z prędkością v_3= 20 m/s , a czwartą z prędkością v_4 = 5 m/s. Znaleźć średnia prędkość motocyklisty na całym odcinku drogi.
4. Pojazd przejechał jedną trzecią drogi z prędkością 20 m/s, a dwie trzecie z prędkością 30 m/s. Ile wynosi średnia prędkość ?
5. Pocisk wystrzelono pionowo do góry z prędkością początkową v_0. Znaleźć czas po którym pocisk znajdzie się w połowie maksymalnej wysokości oraz średnią prędkość pocisku na całym przebytym odcinku drogi.
6. Punkt porusza się po torze prostoliniowym tak, że: $x = 5t + 6t^2$ (wszystkie wielkości podane są w układzie SI). Znaleźć średnią prędkość punktu między początkiem dziesiątej a końcem dwunastej sekundy i prędkości chwilowe w obydwu wymienionych chwilach czasu.
7. Punkt materialny przebywa połowę drogi s ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem a, drugą połowę drogi ruchem jednostajnym. Znaleźć prędkość średnią na całej drodze s.
8. Punkt materialny przebywa połowę drogi ruchem jednostajnym z prędkością v, a drugą połowę drogi ruchem jednostajnie opóźnionym aż do zatrzymania się. Znaleźć prędkość średnią na całej drodze.
9. Ciało wyrzucono pionowo do góry z prędkością początkową v = 10 m/s. Obliczyć prędkość średnią ciała do momentu spadku na ziemię. Dane g = 10 m/s
10. Obliczyć prędkość średnią pocisku wystrzelonego pionowo do góry z prędkością początkową v = 40 m/s w ciągu pierwszych pięciu sekund. Dane g = 10 m/s .
11. Pojazd rusza z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym. Po osiągnięciu prędkości v zaczyna poruszać się ruchem jednostajnie opóźnionym aż do zatrzymania się. Obliczyć średnią prędkość ruchu.
12. Znaleźć średnią prędkość ciała poruszającego się na trzech odcinkach drogi: na pierwszym z prędkością v = 5 m/s w czasie t = 2 s, na drugim ruchem jednostajnie

opóźnionym aż do prędkości v = 0 w czasie t = 2 s, na trzecim ruchem jednostajnie przyspieszonym do prędkości v = 5 m/s w czasie t = 2 s.

13. Ruch punktu opisują równania: $x = k_1 t^3$, $y = k_2 t^2$ gdzie $k_1 = 2\ m/s^3$, $k_2 = 3\ m/s^2$. Obliczyć dla t = 1 s prędkość, przyspieszenie, kąt jaki tworzy wektor prędkości i przyspieszenia z osią x, przyspieszenie styczne i dośrodkowe, promień krzywizny toru oraz napisać równanie toru.

14. Ruch punktu opisują równania: $x = (k_1 + k_2)\, t^2$, $y = (r_1 - r_2)\, t$, gdzie: $k_1 = 3\ m/s^2$, $k_2 = 2\ m/s^2$, $r_1 = 3\ m/s$, $r_2 = 2\ m/s$. Znaleźć dla t = 2 s: prędkość, przyspieszenie, kąty jakie tworzą wektory v i a z osią x, przyspieszenie styczne i dośrodkowe, promień krzywizny toru oraz napisać równanie toru.

15. Ruch punktu opisują równania: $x = A_1 t^3 + B$, $y = A_2 t^2 + C$ gdzie $A_1 = 2\ m/s^3$, $A_2 = 3\ m/s^2$, B = 2 m, C = 3 m. Obliczyć dla t = 2 s prędkość, przyspieszenie, kąt jaki tworzy wektor prędkości i przyspieszenia z osią x, przyspieszenie styczne i dośrodkowe, promień krzywizny toru oraz napisać równanie toru.

16. Ruch punktu opisują równania: x = A cos kt, y = A sin kt, gdzie A = 0,1 m, k = 0,01 1/s. Obliczyć: prędkość, przyspieszenie, przyspieszenie styczne i przyspieszenie dośrodkowe, promień krzywizny toru oraz znaleźć równanie toru w momencie czasu t = 1 s.

17. Ruch punktu opisują równania: x = B sin t/2, y = B cos t/2, gdzie B = 0,1 m. Obliczyć: prędkość, przyspieszenie, przyspieszenie styczne i przyspieszenie dośrodkowe, promień krzywizny toru dla t = 1 s oraz znaleźć równanie toru.

18. Ruch punktu opisują równania: $x = 3\ t$, $y = 2\ t^2$. Znaleźć: a) równanie toru oraz narysować wykres y(x). Zaznaczyć położenie punktu w 2 sekundzie ruchu, b) prędkość dla t=2s, c) przyspieszenie, d) przyspieszenie styczne dla t-=2s, e) przyspieszenie normalne dla t = 2 s, f) promień krzywizny toru w momencie czasu t = 2 s.

19. Ruch punktu materialnego opisują równania: x = 4 sin (t/2), y = 4 cos (t/2). Znaleźć: dla t = 2 s: a) równanie toru, b) prędkość , c) przyspieszenie, d) przyspieszenie styczne, e) przyspieszenie normalne, promień krzywizny.

20. Ruch punktu opisują równania: x = 3 sin 2t, y = 3 cos 2t. Napisać równanie toru. Obliczyć: prędkość, przyspieszenie, przyspieszenie styczne, przyspieszenie dośrodkowe i promień krzywizny toru. Czas t = 2 s.

21. Jaki jest kształt toru punktu poruszającego się tak, że $\vec{a} = const$, a jaki gdy a = const (podać uzasadnienie).

22. Jaką drogę przebędzie ciało w drugiej sekundzie ruchu jednostajnie przyspieszonego, jeżeli w pierwszej sekundzie przebyło drogę 1 m. Podać odpowiednie obliczenia.

23. Czas spadku swobodnego ciała z wysokości h wynosi t . Na jakiej wysokości znajdzie się ciało po upływie połowy tego czasu.

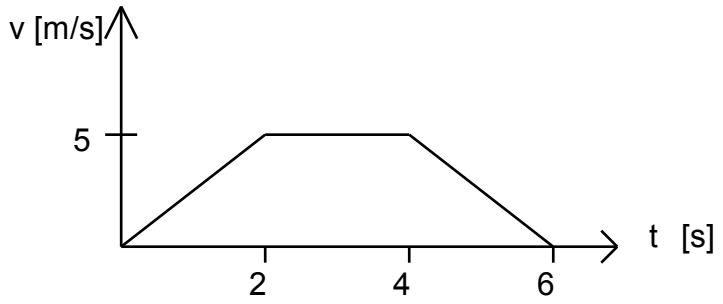
24. Pod jakim kątem należy wystrzelić pocisk aby zasięg rzutu i wysokość maksymalna były sobie równe ?

25. Pocisk wystrzelono pod kątem $\alpha = 60°$ z prędkością początkową $v_0 = 20$ m/s . Po jakim czasie prędkość pocisku osiągnie wartość 10 m/s. W jakim punkcie toru znajdzie się pocisk w tym momencie czasu?

26. Ciało spada swobodnie z wysokości h. Na jakiej wysokości znajdzie się ciało po upływie 1/4 czasu spadania? Dane jest przyspieszenie grawitacyjne g.

27. Znaleźć czas po upływie którego prędkość ciała wyrzuconego ukośnie pod kątem α do poziomu z prędkością początkową v_0 utworzy z poziomem kąt β. Dane jest przyspieszenie ziemskie g.

28. Posługując się poniższym wykresem narysować zależność a(t) oraz s(t) dla przedziałów czasu: 0 - 2 s , 2 - 4 s, 4 - 6 s.



29. Czy prawdziwe jest twierdzenie że zasięgi w rzucie ukośnym dla kątów różniących się od $\pi/4$ o tę samą wartość są równe. Podać uzasadnienie podanej odpowiedzi.

30. Kamień wyrzucono pod kątem $\alpha = 30°$ do poziomu z prędkością $v_0 = 10$ m/s. Obliczyć najmniejszą odległość L między miejscem wyrzutu i miejscem w którym znajdzie się kamień po upływie czasu t = 4 s od rzutu.

31. Wykazać, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym stosunek dróg przebywanych w kolejnych takich samych odstępach czasu jest równy 1 : 3 : 5 : 7 : .....

32. Obliczyć stosunek prędkości kulki spadającej swobodnie w punkcie znajdującym się w połowie wysokości i na końcu drogi spadania.

33. Z helikoptera wznoszącego się pionowo ze stałą prędkością na wysokości 400 m

wypadł przedmiot. Narysować wykres odległości od ziemi H(t) od momentu opuszczenia helikoptera przez przedmiot.