

# 1 Funkcje

## 1.1 Granice funkcji, ciągłość

1. Zbadaj, czy istnieją poniższe granice:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|^3}{|x-1|}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\operatorname{sgn}(x^5)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$ .
2. Wykaż, że nie istnieją granice:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{\pi x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$ .
3. Wyznacz granice funkcji:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{\operatorname{tg} 2x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\arcsin 9x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\arcsin 6x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 4x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}$ .
4. Wyznacz granice funkcji:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-4^x}{6x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{tg} x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \cdot 3^x-3 \cdot 4^x}{2 \cdot 6^x-6 \cdot 2^x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)}$ .
5. Oblicz  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin 6x)}{\ln(\arcsin x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x})$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}^2 x}$ .
6. Uzasadnij, że funkcje są ciągłe w podanych punktach:  $f(x) = \frac{x^3}{1-3x^2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $g(x) = \cos(2^x - 3)$ ,  $x_0 = 2$ ,  $h(x) = \operatorname{arctg}(x - \pi)$ ,  $x_0 = \pi$ .
7. Zbadaj ciągłość funkcji w podanych punktach  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $g(x) = 2^{1/x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{\pi}$ ,  $x_0 = \pi$ .
8. Zbadaj ciągłość funkcji w punktach  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -\sin 2x & \text{dla } x < 0, \\ \arccos(x-1) & \text{dla } x \in [0, 2], \\ \frac{x}{x-2} & \text{dla } x > 2, \end{cases}$$

9. Wyznacz granice funkcji:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \arcsin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\ln(\cos 3x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{x - \sin x} \right]$ .
10. Znajdź i zbadaj wszystkie punkty nieciągłości funkcji  $y = \frac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$ .
11. Dobierz parametr  $a$  tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(x-1) + a & \text{dla } x \in [0, 2], \\ \sqrt{x-2} - 1 & \text{dla } x > 2, \end{cases}$$

była ciągła w punkcie  $x_0 = 2$ . Narysuj wykres funkcji  $f$  dla wyznaczonego  $a$ . Wyznacz  $f^{-1}(\{-1\})$ .

12. Dobierz parametr  $a$  tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2-2x} - 1 & \text{dla } x \leq -1, \\ \operatorname{arctg} x + a & \text{dla } x \in (-1, 0), \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

była ciągła w punkcie  $x_0 = -1$ . Narysuj wykres funkcji  $f$  dla wyznaczonego  $a$ . Wyznacz  $f^{-1}(\{1\})$ .

13. Dobierz  $a, b$  tak aby funkcja była ciągła w punkcie  $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} & \text{dla } x > 0, \\ b + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^{-n}} & \text{dla } x = 0, \\ a - \frac{\sin^2 x}{x} & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

14. Zbadaj ciągłość funkcji  $y = |x-1|e^x$ .

15. Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin ax}{x} & \text{dla } x \in [-1, 0), \\ \frac{b \ln bx}{\ln ax} & \text{dla } x \in (0, \infty), \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Dobierz parametry  $a, b$  tak aby funkcja była ciągła na  $[-1, \infty)$ .

16. Dobierz parametry  $a, b$  tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x-1} - 1 & \text{dla } x \leq -1, \\ \operatorname{arctg} x + a & \text{dla } x \in (-1, 0), \\ x^2 + b & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$$

była ciągła w  $\mathbb{R}$ . Narysuj wykres funkcji  $f$  dla wyznaczonych parametrów  $a, b$ . Wyznacz  $f^{-1}(\{1\})$ .

17. Dobierz parametry  $a, b$  tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + b & \text{dla } x < 0, \\ \frac{1}{\pi} \arccos(x-1) + a & \text{dla } x \in [0, 2], \\ \sqrt{x-2} - 1 & \text{dla } x > 2, \end{cases}$$

## 1.2 Asymptoty wykresu funkcji. Pochodna funkcji, zastosowania.

1. Oblicz pochodną funkcji  $f(x) = [\arcsin x]^{4x}$ ,  $f(x) = (\arcsin \sqrt{1-x^2})^2$ ,  $y = (1 + 2\sqrt{x^5 + 6 \sin x})^{11/5}$ .
2. Znajdź styczną do paraboli  $y = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)$  równoległą do prostej  $y = x$
3. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji  $y = \frac{\ln x}{x}$  w punkcie  $(e, y_0)$ .
4. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji  $y = x \ln(x^2)$  w punkcie  $(\sqrt{e}, y_0)$ .
5. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji  $f(x) = \frac{2-2x^3}{x^2-4}$ ,  $g(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$ ,  $h(x) = \frac{2-2x^3}{x^2-4}$ .
6. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji  $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+5x+6}$ ,  $g(x) = \frac{x^3+1}{3x-2x^2}$ ,  $h(x) = \frac{3x}{2} \ln(e - \frac{1}{3x})$ ,  $p(x) = \frac{2-2x^3}{x^2-4}$ .
7. Wyznacz ekstrema lokalne oraz przedziały monotoniczności i wypukłości funkcji  $f(x) = x^2 + 4 \ln(x-3)$ ,  $g(x) = x e^{-x^2}$ .
8. Narysuj wykres funkcji  $y = 1 - \ln(x+1)$  oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu w punkcie przecięcia się wykresu z osią  $Ox$ . Narysuj wykres funkcji  $y = 1 + e^{x+2}$  oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu w punkcie przecięcia się wykresu z osią  $Oy$ .
9. Podaj twierdzenie de L'Hospitala oraz przykłady jego zastosowania. Oblicz  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$ .
10. Podaj WKW I ekstremum lokalnego funkcji. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji, przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji  $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$ ,  $g(x) = x^3 e^{1/x}$ .
11. Wyznacz przedziały w których funkcja  $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$  jest jednocześnie malejąca i wklęsła.
12. Znajdź przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji:  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .
13. Oblicz:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x^2+1} - x^2)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x})^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\ln(x-1)}$ .
14. Oblicz:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)^2 f'(x)$  dla  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$ .
15. Znajdź przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji:  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ .
16. Znajdź wszystkie asymptoty i ekstrema lokalne funkcji:  $f(x) = x - \ln x^2$ .
17. Wyznacz asymptoty i ekstrema lokalne funkcji:  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .
18. Wyznacz dziedzinę, ekstrema, asymptoty oraz przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji:  $y = (x-4)e^{\frac{1}{x-4}}$ .
19. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2} & \text{dla } 0 < |x| \leq 2 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

20. Znajdź przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji:  $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$
21. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji  $y = |x-1|e^x$ .
22. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji  $y = \sqrt[3]{x^2}e^{-x}$ .
23. Znajdź przedziały monotoniczności, wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji:  $f(x) = \frac{x^3+2}{(x+1)^2}$ .
24. Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości i punkty przegięcia funkcji  $f(x) = x e^{-x^2}$ .
25. Wyznacz asymptoty i ekstrema lokalne funkcji  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ .
26. Zbadaj przebieg zmienności funkcji:  $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$ .
27. Znajdź wszystkie asymptoty funkcji  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ .
28. Wyznacz przedziały w których funkcja  $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$  jest jednocześnie malejąca i wklęsła.
29. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .
30. Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji  $y = x e^{1-x^2}$ .
31. Wyznacz ekstrema lokalne oraz przedziały monotoniczności i wypukłości funkcji  $f(x) = x^2 + 4 \ln(x-3)$ .
32. Wyznacz przedziały w których funkcji:  $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$  jest jednocześnie malejąca i wypukła.
33. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji  $f(x) = x^3 e^{1/x}$ .
34. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji  $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{\pi}$ .
35. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:  $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ .
36. Wyznacz przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji  $f(x) = \ln x + \ln^2 x$ .