

Zadania z szeregów funkcyjnych.

1. Wykazać, stosując kryterium Weierstrassa, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}$$

jest jednostajnie zbieżny w $\mathbb{R}$.

2. Wykazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^2 + 1}$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $(-a, a)$, gdzie $a > 0$, ale nie jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(0, \infty)$.

3. Wykazać indukcyjnie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ i dowolnego $x \in (0, 2\pi)$

$$\sin x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Na tej podstawie, stosując kryterium Dirichleta wykazać, że szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

jest jednostajnie zbieżny w dowolnym przedziale $(a, b) \subset (0, 2\pi)$.