Zestaw 1 - granice ciągów

1. Obliczyć granice ciągów:

a) $\sqrt[2n+1]{n^3+n^2+1}$

b) $\dfrac{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}{n}$

c) $\sqrt[2n]{5^n-4^n-3^n}$

d) $\dfrac{3n-n\sin n}{n^2+1}$

e) $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\dfrac{\cos n}{2+\sin n}$

f) $(\sqrt{n^2+2n}-n)$

g) $4^n+(-2)^n$

h) $\sqrt[2n]{(n^2+1)^{n+1}}$

i)* $\dfrac{1^4+2^4+...+n^4}{1^4+2^4+...+n^4+(n+1)^4}$

j) $\left(1+\dfrac{2}{n+6}\right)^{4n}$

k) $\left(2-\dfrac{2}{n+6}\right)^{4n}$

l) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{n+6}\right)^{4n}$

m) $\left(1+\dfrac{2}{n^2+6}\right)^{4n}$

n) $\left(\dfrac{n^2-n}{n^2+2}\right)^{2n}$

o) $\left(\dfrac{n^2+2}{n^2-2}\right)^{n^2}$

p) $\left(\dfrac{n+6}{n+2}\right)^{n^2}$

q) $\left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2+2n}\right)^{n+4}$

r) $\left(\dfrac{3-n^2}{n^2+2}\right)^{n}$

s) $\sqrt[3]{n^4-n^3}-\sqrt[3]{n^4+n^2}$

t) $n\Big(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2+n^2}+...+\dfrac{1}{n+n^2}\Big)$

u)* $n(\sqrt[n]{5}-1)$.

2.* Niech liczby całkowite a_n i b_n spełniają zależność $a_n+b_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n$. Obliczyć granicę ciągu $\dfrac{a_n}{b_n}$.

3.* Niech $c>0$. Ciąg a_n dany jest wzorem rekurencyjnym: $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{c}{a_n})$. Uzasadnić, że ten ciąg ma granicę, a następnie wyznaczyć ją.

4.** Udowodnić, że jeśli $a_n\to g$ (g jest skończona lub nie), to również $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\to g$.

5. Obliczyć granicę ciągu $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}}{n}$.