

Zadania na 25.10.

1. Udowodnić za pomocą indukcji matematycznej:

a) dla $n \in \mathbb{N}_+$, $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) dla $n \geq 5$, $n^2 < 2^n$,

c) dla $n \in \mathbb{N}_+$, liczba podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n .

2. Rozwiązać równania $\lfloor x^2 \rfloor = 4$; $(\lfloor x \rfloor)^2 = 4$.

3. Przy pomocy poznanych wzorów wykazać, że:

a) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

b) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$,

c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

d) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

4*. Obliczyć $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$.

5. Wyznaczyć α , jeśli:

a) $\sin \alpha = \sin 3$,

b) $\cos \alpha = -\sin \frac{1}{3}$,

c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Wykazać, że o ile istnieje $\operatorname{tg} x$, zachodzi wzór $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x$. Na tej podstawie obliczyć $\operatorname{tg} x$, jeśli $x \in (\pi, 2\pi)$ oraz $\cos x = 0,4$.

6. Narysować wykresy funkcji $f(x) = \arccos(\cos x)$ i $g(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

7. Rozwiązać równanie $|x| + |x+1| + |x+2| = 3$.

8. Rozwiązać równanie $\log_a(x-2) + \log_a(8-x) = \log_a(2x)$, gdzie niewiadomą jest x , a a - dowolną dodatnią liczbą różną od 1.