

Zestaw 6 - całki oznaczone.

1. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi:

a) $x^2 + y^2 = 8, 2y = x^2$.

b) $(y - x - 2)^2 = 9x, x = 9$,

c) $y^2 = x^2 - x^4$,

d) pętlą daną równaniami parametrycznymi $x = a \cos t, y = b \sin t$, gdzie $a, b > 0$ (elipsa).

e) pętlą $x = t^2 - 1, y = t^3 - t + 2$,

f)* $x = a \cos t, y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$,

g) $r = \frac{1}{\phi}, r = \frac{1}{\sin \phi}$ dla $\phi \in (0; 0,5\pi >$ we współrzędnych biegunowych,

h) $r = 2 + \cos 2\phi$ i $r = 2 + \sin \phi$ we współrzędnych biegunowych,

i) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$,

j) osią OX i krzywą parametryczną $x = t^2 + t - 3, y = \sqrt{t^2 + 1}$

2. Obliczyć długości krzywych:

a) $y = \ln x$ dla $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]$,

b) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$,

c) pętli $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$,

d) kardioidy $r = a(1 + \cos \phi)$.

3. Obliczyć objętość brył powstałych z obrotu następujących krzywych wokół osi Ox:

a) $x^4 + y^4 = x^3$,

b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4. Znaleźć pracę, jaką należy wykonać, aby podnieść masę m z powierzchni Ziemi na wysokość h , jeżeli siła przyciągania ziemskiego w odległości x od środka Ziemi wynosi $F = \frac{mgR^2}{x^2}$, gdzie R oznacza promień Ziemi. Jaką prędkość należy nadać ciału, aby wyrzucone z powierzchni Ziemi pionowo nie wróciło na Ziemię?