

Prosta i płaszczyzna

Zad.1 Znaleźć równanie płaszczyzny:

- 1.1 przechodzącej przez punkt $P(1, 2, -3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [2, -4, 3]$.
- 1.2 przechodzącej przez punkt $P(-4, -1, -2)$ i równoległej do płaszczyzny $2x - 3y + 4z = 0$.
- 1.3 przechodzącej przez punkt $P(1, 2, -3)$ i zawierającej oś OZ .
- 1.4 zawierającej oś OY i równoległej do odcinka o końcach $(1, 0, 0)$ i $(0, 0, 2)$.
- 1.5 przechodzącej przez punkt $P(-1, -2, -3)$ i prostopadłej do płaszczyzn $x - 3y + 2z - 7 = 0$ oraz $2x - 2y - z + 3 = 0$.
- 1.6 przechodzącej przez punkt $P(6, 2, -1)$ i prostopadłej do prostej, będącej częścią wspólną płaszczyzn $4x - 3y + 2z + 5 = 0$ i $-5x + 8y - 7z + 2 = 0$.
- 1.7 przechodzącej przez punkty $A(3, 1, 2)$, $B(0, -1, 1)$ i $C(1, 0, 2)$.
- 1.8 przechodzącej przez punkt $P(1, 0, 0)$ i równoległej do trójkąta o wierzchołkach $A(2, 3, 0)$, $B(4, 4, 4)$ i $C(2, 0, 4)$.
- 1.9 przechodzącej przez punkt $P(-5, 1, 6)$ i odcinającej równe odcinki na dodatnich półosiach układu współrzędnych.

Zad.2 Znaleźć równanie prostej:

- 2.1 przechodzącej przez punkty $A(5, -2, 4)$ i $B(2, 6, 1)$.
- 2.2 przechodzącej przez punkt $P(-4, -1, -2)$ i prostopadłej do płaszczyzny $2x - 8y + 3z + 4 = 0$.
- 2.3 przechodzącej przez punkt $P(1, 1, 4)$ i prostopadłej do osi OY oraz do prostej $\frac{x-5}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
- 2.4 przechodzącej przez środek układu współrzędnych i równoległej do prostej:

$$l : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

Zad.3 Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez proste $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ i $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$.

Zad.4 Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez proste $x = y = z$ i $2x = y = -z$.

Zad.5 Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkt $(2, 0, -7)$, która jest prostopadła do płaszczyzny $x + 5z = 0$ i zarazem równoległa do prostej $\frac{x}{4} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Zad.6 Znaleźć równanie płaszczyzny zawierającej punkt $(-1, 0, 0)$ i prostą $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

Zad.7 Znaleźć równanie płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny $3x - 5y + 2z - 1 = 0$ i zawierającej prostą $\frac{x+4}{4} = \frac{y-1}{2} = z$.

Prosta i płaszczyzna - ciąg dalszy

Zad.1 Obliczyć odległość punktu $(5, -8, 1)$ od płaszczyzny $4x - 3z - 2 = 0$.

Zad.2 Dla jakich wartości parametru k płaszczyzny: $7x - 2y - z = 0$ i $kx + 6y + 3z - 3 = 0$ są równoległe. Oblicz ich odległość.

Zad.3 Obliczyć odległość płaszczyzn równoległych: $2x - y + 2z + 5 = 0$ i $2x - y + 2z - 1 = 0$.

Zad.4 Znaleźć równania płaszczyzn równoległych do płaszczyzny $3x - 6y - 2z + 2 = 0$ w odległości 3 od niej.

Zad.5 Dla jakich wartości parametru k płaszczyzny: $2x - y + kz - 2 = 0$ i $3kx + y + 2z + 1 = 0$ są prostopadłe. Wyznaczyć równanie krawędzi tych płaszczyzn.

Zad.6 Wyznaczyć kąt między płaszczyznami: $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ i $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Zad.7 Znaleźć rzut punktu $(4, -3, 1)$ na płaszczyznę $x + 2y - z - 3 = 0$.

Zad.8 Znaleźć punkt symetryczny do punktu $(5, 2, -1)$ względem płaszczyzny $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Zad.9 Zbadać wzajemne położenie prostej i płaszczyzny:

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2} \quad \pi : 2x + y + z = 0.$$

Jeżeli prosta przebija płaszczyznę, znaleźć punkt przecięcia oraz kąt między prostą i płaszczyzną.

Zad.10 Wykazać, że prosta l jest równoległa do płaszczyzny π :

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \quad \pi : 2y + 2z - 5 = 0.$$

Obliczyć odległość prostej l od płaszczyzny π .

Zad.11 Wykazać, że prosta

$$l : \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

leży w płaszczyźnie $3x - 2y + 4z - 6 = 0$.

Zad.12 Znaleźć rzut punktu $(2, -1, 3)$ na prostą $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{3}$.

Zad.13 Na prostej $\frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$ znaleźć punkt leżący najbliżej punktu $(3, 2, 6)$.

Zad.14 Znaleźć odległość punktu $(1, -1, -2)$ od prostej $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$.

Zad.15 Zbadać wzajemne położenie prostych:

a)

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \quad l_2 : \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

b)

$$l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-6} \qquad l_2 : \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Jeżeli proste są współpłaszczyznowe wyznaczyć równanie płaszczyzny, w której leżą. Jeżeli proste te przecinają się znaleźć ich punkt wspólny oraz kąt między nimi.

Zad.16 Wykazać, że proste $l_1 : x = 2 + 4t, y = -6t, z = -1 - 8t$ i $l_2 : \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$ są równoległe. Obliczyć odległość między nimi i wyznaczyć równanie płaszczyzny, w której leżą.

Zad.17 Znaleźć odległość między prostą $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ i osią OY.

Zad.18 Wykazać, że proste l_1 i l_2 są skośne. Obliczyć odległość między nimi.

a)

$$l_1 : \frac{x+5}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-5}{-5} \qquad l_2 : \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

b)

$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \qquad l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

Prosta i płaszczyzna - zadania doatkowe

Zad.1 Dana jest prosta $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Na płaszczyźnie $\pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ znaleźć prostą l_1 równoległą do płaszczyzny $\pi_2 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ i przechodzącą przez punkt $A(-1, 1, -1)$. Znaleźć odległość między prostymi l i l_1 .

Zad.2 Na prostej

$$l : \begin{cases} 2x + y + z + 8 = 0 \\ x - 4y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

znaleźć punkt P oddalony o 5 od płaszczyzny $\pi : 3x - 6y + 2z - 10 = 0$.

Zad.3 Przez punkt wspólny płaszczyzny $\pi : x + y + z - 1 = 0$ i prostej

$$l : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

poprowadzić prostą leżącą w płaszczyźnie π i prostopadłą do prostej l .

Zad.4 Dany jest punkt $A(1, 2, 3)$ i płaszczyzny

$$\pi_1 : x + y - z - 3 = 0 \qquad \pi : 2x + z - 10 = 0.$$

Z punktu A poprowadzić proste prostopadłe do π_1 i π_2 i przecinające je w punktach B i C . Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkty B i C .

Zad.5 Dane są wierzchołki czworoboku $P_1(0, 0, 2)$, $P_2(3, 0, 5)$, $P_3(1, 1, 0)$, $P_4(4, 1, 2)$. Wyznacz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka P_4 .

Zad.6 Przez punkt $A(4, 0, -1)$ poprowadzić prostą przecinającą dwie proste

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{3} \qquad l_2 : \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$$

Zad.7 Na prostej $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$ równooddalony od punktów $A(1, 3, -2)$ i $B(-3, 1, 4)$.

Zad.8 Znaleźć równanie tej prostej przechodzącej przez punkt $(3, 0, -1)$, która przecina pod kątem prostym prostą $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}$. Znaleźć punkt symetryczny do podanego punktu względem podanej prostej.

Zad.9 Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(5, 2, 0)$, oddalonej o 1 od punktu $B(6, 1, -1)$ i oddalonej o 3 od punktu $C(0, 5, 4)$.

Zad.10 Na krawędzi przecięcia płaszczyzny $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ z płaszczyzną OXZ znaleźć punkt P oddalony o $\sqrt{6}$ od płaszczyzny $2x + y - z + 3 = 0$.

Zad.11 Znaleźć równanie płaszczyzny, której odległość od płaszczyzny $x + y - z + 1 = 0$ jest dwa razy większa niż od płaszczyzny $x + y - z - 1 = 0$ i nie leżącej między tymi płaszczyznami.

Rozwiązania dowolnie wybranych zadań z tych zestawów, a także z większości zbiorów zadań z matematyki dla studentów, można zamawiać: antitau1@wp.pl

Zad.12 Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez oś OX i tworzącej kąt 60° z płaszczyzną $x - y = 0$.

Zad.13 Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez prostą powstałą z przecięcia płaszczyzn $x + 2y - z + 5 = 0$, $2x - y + 4z - 8 = 0$ i odcinającej na osiach układu OX i OY równe odcinki.

Zad.14 Znaleźć równania dwusiecznych kątów między prostymi:

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1} \quad l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}.$$

Zad.15 Przez punkt $A(2, -2, 0)$ poprowadzić prostą przecinającą prostą

$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-2}$$

i tworzącą kąt 60° z prostą

$$l_2 : \begin{cases} x-1 = 0 \\ z+1 = 0. \end{cases}$$

Zad.16 Dane są dwa wierzchołki trójkąta $A(-4, -1, 2)$ i $B(3, 5, -6)$. Znaleźć trzeci wierzchołek C wiedząc, że środek boku AC leży na osi OY, a środek boku BC na płaszczyźnie OXZ.

Zad.17 Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(0, 1, 1)$, rzut punktu $B(0, 1, 5)$ na prostą

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

i oddaloną od początku układu o $\frac{1}{\sqrt{14}}$.