

Algebra i teoria liczb, Egzamin 10.02.2010

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x,y) spełniające równanie
 $3x+7y = 12$
Uzasadnij odpowiedź.
2. Przy pomocy kongruencji wyznacz resztę z dzielenia $3^{40} + 5^{40}$ przez 13.
3. Niech $\Phi(n)$ oznacza grupę elementów odwracalnych pierścienia Z_n z dodawaniem i mnożeniem modulo n . Czy $\Phi(16)$ jest grupą cykliczną? Dlaczego? Jaki jest rząd tej grupy? Jaki jest rząd elementu 11 w tej grupie? Dlaczego?
4. Udowodnij, że w każdym pierścieniu $0 \cdot a = 0$ dla każdego elementu a pierścienia.
5. W grupie permutacji S_4 liczb $\{1, 2, 3, 4\}$ niech $H = S_3$ oznacza podgrupę tych permutacji, które przeprowadzają liczbę 4 w siebie. Niech H_1 będzie podgrupą składającą się z trzech permutacji: $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ i (1) . Pokaż, że H_1 jest dzielnikiem normalnym w H ale nie jest dzielnikiem normalnym w całej grupie S_4 .
6. Niech P będzie zbiorem funkcji liniowych $P = \{a + bx : a, b \text{ liczby rzeczywiste}\}$ z działaniami
$$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x ,$$
$$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc + bd)x.$$

Pokaż, że to mnożenie jest łączne. Pozostałe warunki z definicji pierścienia też są spełnione (nie trzeba sprawdzać). Znajdź jakiś dzielnik zera w tym pierścieniu. Uzasadnij dlaczego to jest dzielnik zera.