

Egzamin Komisyjny topologia 29.09.2010

1. Na płaszczyźnie R^2 rozważamy metrykę dyskretną d_0 , gdy $d_0(x, y) = 0$ dla $x = y$ i $d_0(x, y) = 1$ dla $x \neq y$. Rozważamy zbiór

$$A = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq x < 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Należy odpowiedzieć na następujące pytania i **uzasadnić** odpowiedź.

- a) Jakie jest domknięcie $\overline{A}$ zbioru A ?
- b) Czy $\overline{A}$ jest zwarty?
- c) Czy $\overline{A}$ jest zupełny?
- d) Czy A jest spójny?
- e) Jakie jest wnętrze zbioru A ?
- f) Czy wnętrze A jest spójne?

2. Podaj definicję Heinego (przy pomocy ciągów) funkcji ciągłej z przestrzeni metrycznej (X, d) w przestrzeń metryczną (X_1, d_1) .

3. Na płaszczyźnie R^2 rozważamy zwykłą metrykę.

- a) Czy ciąg punktów $p_n = (\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n})$ jest zbieżny? Uzasadnij odpowiedź.
- b) Rozważmy funkcję $f : R^2 \rightarrow R^2$ określoną wzorem

$$f(x, y) = (x + y, y) \quad \text{gdy} \quad x \geq y,$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, y) \quad \text{gdy} \quad x < y.$$

Czy funkcja f jest ciągła? Uzasadnij odpowiedź.

4. a) Podaj definicję przestrzeni zwartej.

b) Udowodnij twierdzenie: Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej (X, d) w przestrzeń metryczną (Y, d_1) i jeśli (X, d) jest przestrzenią zwartą to $f(X)$ jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni Y .