

### Egzamin topologia 20.06.2011

**Uwaga** Należy udowodnić dwa spośród punktów

1c, 2b, 3b i odpowiedzieć na wszystkie pozostałe punkty.

1. (a) Podaj definicję przestrzeni metrycznej  $(X, d)$ .  
(b) Podaj definicję zbioru otwartego.  
(c) Udowodnij, że jeśli  $A \subset X$  i  $B = \{x \mid d(x, A) < 1\}$  to  $B$  jest zbiorem otwartym.
2. (a) Podaj definicję przestrzeni metrycznej zwartej.  
(b) Udowodnij, że jeśli  $X$  jest przestrzenią zwartą i funkcja  $f : X \rightarrow R$  jest ciągła to  $f$  jest ograniczona (nie wolno korzystać z twierdzeń o przestrzeniach zwartych, tylko z definicji.)
3. (a) Podaj definicję funkcji ciągłej  $f : X \rightarrow Y$  w punkcie  $x_0 \in X$ .  
(b) Udowodnij, że jeśli  $f$  jest ciągła w  $x_0$  to dla każdego zbioru  $B \subset Y$   
$$(f(x_0) \in \text{Int}(B)) \Rightarrow x_0 \in \text{Int}(f^{-1}(B)).$$
4. (a) Podaj definicję przestrzeni zupełnej.  
(b) Czy ciąg  $x_n = (1/n, 1/2)$  jest ciągiem Cauchy w  $R^2$  z metryką "rzeka"? Udowodnić odpowiedź.  
(c) Napisz Twierdzenie Cantora o części wspólnej zbiorów domkniętych w przestrzeni zupełnej.
5. Czy jeśli z  $R^2$  wyrzucić:  
a) prostą,  
b) odcinek ograniczony prostą,  
c) dowolny zbiór ograniczony,  
to pozostanie zbiór spójny?  
Pozostanie zbiór lokalnie spójny?  
(Uzasadnić odpowiedzi. Razem 6 przypadków.)