

1. Metodą eliminacji Gaussa, z wyborem elementu podstawowego w kolumnie, rozwiązać układ liniowych równań

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases}$$

2. Metodą LU rozkładu rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

3. Metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu podstawowego w kolumnie obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Metodą eliminacji (dla układów z macierzą trójdagonalną) rozwiązać układ liniowych równań

$$\begin{cases} 3x_0 - x_1 & = 4, \\ -x_0 + 3x_1 - x_2 & = -6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 & = 7, \\ -x_2 + 3x_3 & = -2. \end{cases}$$

5. Metodą połowienia znaleźć dodatni pierwiastek równania $x^2 - x - 1 = 0$ z dokładnością do 10^{-2} .

6. Pokazać, że równanie $\sin x + x - 1 = 0$ ma pierwiastek w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$. Ile trzeba wykonać iteracji, aby metodą połowienia otrzymać przybliżoną wartość pierwiastka z błędem nie przekraczającym $5 \cdot 10^{-4}$.

7. Stosując metodę Newtona obliczyć dodatni pierwiastek równania $\lg x - x - 1 = 0$ z dokładnością do 10^{-2} .

8. Stosując metodę siecznych znaleźć pierwiastek równania $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, położony w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ z dokładnością do 10^{-2} ($x_0 = 1, x_1 = 2$).

9. Znaleźć wielomian drugiego stopnia $L_2(x)$, który spełnia warunki $L_2(0) = 0, L_2(1) = 1, L_2(2) = 0$, wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange'a i Newtona oraz udowodnić, że te wielomiany są takie same.

10. Zbudować wielomian interpolacyjny Newtona dla funkcji podanej w tabeli

x_i	-2	-1	1	2	3
$f(x_i)$	26	5	3	-4	-7

11. Niech $f(x) = \sin(\pi x/2)$, a $L_2(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym drugiego stopnia, wartości którego w punktach $x = 0, 1, 2$ są równe odpowiednim wartościom funkcji $f(x)$. Oszacować błąd wielomianu interpolacyjnego. Porównać to oszacowanie z błędem faktycznym w punktach $x = 1/4$ i $x = 3/4$.

12. Z jaką dokładnością można obliczyć $\sqrt{116}$ mając podane wartości $\{\sqrt{100}; \sqrt{121}; \sqrt{144}\}$, wykorzystując wielomian interpolacyjny drugiego stopnia.

13. Metodą najmniejszych kwadratów dla funkcji podanej w tabeli

x_i	1	2	3	4
y_i	2	3	5	3

znaleźć wielomiany interpolacyjne pierwszego i drugiego stopnia.

14. Wykazać, że wzór trapezów dokładnie całkuje dowolną funkcję liniową, natomiast wzór Simpsona dokładnie całkuje dowolny wielomian stopnia trzeciego.

15. Zastosować wzór średnich prostokątów oraz Simpsona do obliczenia całki z funkcji $f(x) = x^4$ na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, porównać błąd faktyczny z oszacowaniem błędu.

16. Jakiej wielkości ma być krok h przy zastosowaniu wzorów złożonych trapezów (Simpsona) w obliczeniu całki z funkcji $f(x) = x^4$ na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, aby błąd nie przekraczał 10^{-6} ?

17. Dobrać krok całkowania numerycznego tak, aby trakcie liczenia całki z funkcji $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$ przy pomocy wzoru złożonego trapezów (Simpsona) uzyskać wynik z dokładnością 10^{-4} .

18. Udowodnić, że metoda Rungiego-Kutty rozwiązywania zagadnienia początkowego $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$, która jest zadana tablicą współczynników

$$\begin{array}{cc} 0 & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

ma drugi rząd aproksymacji.

19. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$u' = -u, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(0) = 1$$

wykorzystując metodę Rungiego-Kutty

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau k_1}{2}\right),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau k_2$$

dla kroku $\tau = 0,25$ i porównać z dokładnym rozwiązaniem.

20. Wykazać, że dwukrokowa metoda

$$y_{n+1} + 4y_n - 5y_{n-1} = \tau(4f(t_n, y_n) + 2f(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

rozwiązania zagadnienia początkowego $u' = f(t, u)$, $u(t_0) = u_0$ ma trzeci rząd aproksymacji.

21. Zbadać stabilność metody

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{\tau}{6}(6f(t_n, y_n) - 3f(t_{n-1}, y_{n-1}) - 3f(t_{n-2}, y_{n-2})).$$