

Analiza matematyczna, semestr IV

Przykładowe zadania na zaliczenie

Zadania dla MEK 1

1. Ustalić, czy całka

$$\int_{AB} xdy - ydx$$

zależy od drogi całkowania.

2. Udowodnić, że funkcja podcałkowa stanowi różniczkę zupełną, a następnie obliczyć całkę

$$\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^2)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$

3. Obliczyć całkę

$$\int_L y^2 dx - x^2 dy,$$

gdzie L jest okręgiem o promieniu 1 i środku

a) w początku układu współrzędnych, b) w punkcie $(1, 1)$.

4. Znaleźć przyciąganie jednorodnym półokręgiem jednostki masy umieszczonej w środku półokręgu.

Zadania dla MEK 2

5. Obliczyć całkę

$$\int_L \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

gdzie L jest częścią elipsy leżącą w pierwszej ćwiartce w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

6. Obliczyć całkę

$$\int_L (2a - y)dx + xdy,$$

gdzie L jest pierwszym łukiem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ w kierunku zgodnym ze wzrostem parametru.

7. Obliczyć całkę

$$\int_L x^2 ds,$$

gdzie L jest górną częścią okręgu $x^2 + y^2 = a^2$ zawartą między punktami $A(a, 0)$ i $B(-a, 0)$.

8. Obliczyć całkę

$$\int_L xy ds,$$

gdzie L jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ leżącą w pierwszej ćwiartce.

Zadania dla MEK 3

9. Wykazać, że pole wektorowe o składowych $P = 4xy^3z^4 - 3y^2 - 16x^3z$, $Q = 6x^2y^2z^4 - 6xy + 2z^3$, $R = 8x^2y^3z^2 + 6yz^2 - 4x^4$ ma potencjał w całej przestrzeni.

10. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\operatorname{rot}(\varphi A) = \varphi \operatorname{rot} A + (\operatorname{grad} \varphi \times A).$$

11. Pokazać, że dla dwóch pól wektorowych A i B mamy

$$\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B.$$

12. Udowodnić wzór

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \nabla^2 F.$$

Zadania dla MEK 4

13. Obliczyć całkę powierzchniową $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, gdzie $S : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

14. Obliczyć masę powierzchni kuli o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, jeżeli gęstość powierzchniowa jest wprost proporcjonalna do kwadratu pierwszej współrzędnej.

15. Udowodnić, że objętość V bryły ograniczonej zamkniętą, gładką i zorientowaną powierzchnią S , wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{2} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Wskazówka: Zastosować twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego.

16. Obliczyć za pomocą twierdzenia Stokesa pracę wykonaną przez siłę

$$\vec{F} = (x + z)\vec{i} + (x - y + 2z)\vec{j} + (y - 4x)\vec{k}$$

działającą wzdłuż obwodu trójkąta $\triangle ABC$, którego wierzchołki mają następujące współrzędne: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.