

Analiza matematyczna, semestr III

Przykładowe zadania na zaliczenie

Zadania dla MEK 1

1. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π , przy czym $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ dla $x \in (-\pi, 0)$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$ dla $x \in (0, \pi)$ oraz $f(0) = f(\pi) = f(-\pi) = 0$. Rozwinąć funkcję f w szereg Fouriera.

2. Korzystając z rozwinięcia funkcji f z zad.1. wyprowadzić wzór *Leibniza*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

3. Niech $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$ oraz niech f będzie funkcją okresową o okresie 2π . Rozwinąć tę funkcję w szereg Fouriera.

4. Rozwinąć w szereg Fouriera następujące funkcje

a) $f(x) = |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{b) } h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \cup \{\pi\}, \\ x & \text{dla } x \in [0, \pi), \\ \pi & \text{dla } x = -\pi, \end{cases}$$

oraz $h(x + 2\pi) = h(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadania dla MEK 2

5. Wyznaczyć pole ograniczone pętlą krzywej

$$(x + y)^4 = ax^2y.$$

Wskazówka: Wprowadzić nowe zmienne $x = r \cos^2 \theta$, $y = r \sin^2 \theta$.

6. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

7. Obliczyć objętość $|V|$ bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Rx$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

8. Obliczyć całkę

$$\iiint_V z dx dy dz,$$

gdzie V jest górną połową elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Zadania dla MEK 3

9. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$.

10. Obliczyć całkę

$$\iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz,$$

gdzie V jest bryłą ograniczoną z góry powierzchnią $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ a z dołu płaszczyzną OXY .

11. Wyznaczyć objętość części kuli (o promieniu R) wyciętej przez walec (o promieniu $r < R$), który przechodzi przez środek kuli.

12. Obliczyć całkę

$$\int \int_D xy dx dy,$$

gdzie D jest wnętrzem krzywej $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 y}{c^2}$ z pierwszej ćwiartki.

Zadania dla MEK 4

13. Obliczyć całkę $\int_K xy ds$, jeżeli K jest łukiem elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ leżącym w pierwszej ćwiartce.

14. Obliczyć całkę $\int_C xyz ds$, gdzie C jest łukiem krzywej $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2$ między punktami $t = 0, t = 1$.

15. Obliczyć pole płata powierzchniowego, wyciętego walcem $x^2 + y^2 = R^2 (x, y > 0)$ z paraboloidy hiperbolicznej $z = xy$.

16. Wyznaczyć pole części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, wyciętej przez walec $x^2 + y^2 = Rx$.