

Analiza matematyczna, semestr II

Przykładowe zadania na zaliczenie

Zadania dla MEK 1

1. Niech $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.
2. Korzystając z definicji obliczyć $f'(0+)$, gdzie $f(x) = x\sqrt{4x-x^2}$.
3. Obliczyć pochodne funnkcji:
a) $f(u) = \log_u 5$, b) $f(u) = \log_u(u^2+3)$.
4. Wyznaczyć $f^{(n)}(x)$, jeśli $f(x) = \sin^2 x$.

Zadania dla MEK 2

5. Obliczyć całkę $\int x \cos x dx$.
6. Obliczyć całkę $\int e^{\sqrt{x}} dx$.
7. Obliczyć całkę $\int \frac{1}{x^3+1} dx$.
8. Podać przykład funkcji, która jest całkowalna na przedziale $[0, 1]$, lecz nie ma na tym przedziale całki nieoznaczonej.

Zadania dla MEK 3

9. Obliczyć pole figury ograniczonej pętlą linii $y^2 = x(x-1)^2$.
10. Znaleźć długość części traktrisy danej parametrycznie

$$x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}), \quad y = a \sin t,$$

od punktu $(0, a)$ do punktu (x, y) .

11. Wyznaczyć długość linii $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.
12. Pokazać, że jeśli

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \dots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1} = 0,$$

gdzie $c_0, c_1, \dots, c_n$ są liczbami rzeczywistymi, to równanie

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n = 0$$

ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty między 0 a 1.

Zadania dla MEK 4

13. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.
14. Pokazać, że jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich i takim, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący, to $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.
15. Pokazać, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$, gdzie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $\mathbb{R}$.
16. Wyznaczyć funkcję graniczną i zbadać charakter zbieżności ciągu funkcyjnego $\{f_n\}$ określonego na $\mathbb{R}, f_n(x) = x + \frac{e^{-nx}}{n}$.

Zadania dla MEK 5

17. Obliczyć granicę $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
18. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

19. Niech $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$. Pokazać, że $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.
20. Niech ϕ będzie funkcją różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z = y\phi(x^2 - y^2)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Zadania dla MEK 6

21. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = xy + \frac{1}{2(x+y)}$.
22. Spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie $2p$ znaleźć ten, którego pole jest największe.

23. Wykazać, że równanie Laplace'a w $\mathbb{R}^2$ postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

we współrzędnych biegunowych $x = r \cos \theta, r \sin \theta$ wyraża się wzorem

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = 0.$$

24. Wykazać, że jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest różniczkowalna w wypukłym obszarze G i pochodne cząstkowe f_x, f_y są ograniczone, to wtedy $f(x, y)$ jest jednostajnie ciągła w obszarze G .