

Analiza funkcjonalna, semestr I

Przykładowe zadania na zaliczenie

Zadania dla MEK 1

1. Sprawdzić, czy ciąg

$$f_n(t) = t^n(1 - t^n), \quad t \in [0, 1]$$

jest zbieżny w $C([0, 1])$ i jeśli tak, znaleźć jego granicę.

2. Sprawdzić, czy ciąg

$$f_n(t) = \arctg nt, \quad t \in [-1, 1]$$

jest zbieżny w $L^1(-1, 1)$ i jeśli tak, znaleźć jego granicę.

3. Sprawdzić, czy ciąg

$$x_n = \left(\frac{n+1}{2n}, \frac{n+1}{2^2n}, \frac{n+1}{2^3n}, \dots \right)$$

jest zbieżny w l^2 i jeśli tak, znaleźć jego granicę.

4. Sprawdzić, czy ciąg

$$f_n(t) = \sqrt[n]{t}, \quad t \in [0, 1]$$

jest zbieżny w przestrzeniach $C([0, 1])$, $L^\infty(0, 1)$, $L^2(0, 1)$ i jeśli tak, znaleźć jego granicę.

Zadania dla MEK 2

5. Dla jakich $p \in [1, \infty)$, zbiór

$$\{(x_n) \in l^p : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1, \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \geq 0\}$$

jest domknięty w l^p ?

6. Zbadać zwartość zbioru

$$X = \{f \in C^1([0, 1]) : \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \leq 1, \quad \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| \leq 2\}$$

w przestrzeni $C([0, 1])$ z normą supremum.

7. Zbadać zbieżność zbioru

$$X = \{f \in C([0, 1]) : \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \leq 1, f(0) = 0, f(1) = 1\}$$

w przestrzeni $C([0, 1])$ z normą supremum.

8. W przestrzeni l^∞ dane są trzy zbiory:

$$A_1 = \{(x_n) \in l^\infty : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < 1\},$$

$$A_2 = \{(x_n) \in l^\infty : \forall n \in \mathbb{N} |x_n| < 1\},$$

$$A_3 = \{(x_n) \in l^\infty : \forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq 1\}.$$

Czy zbiory te są różne? Znaleźć wnętrze $\text{Int}(A_i)$ i domknięcie $\overline{A_i}$ każdego z nich.

Zadania dla MEK 3

9. W przestrzeni Hilberta l^2 znaleźć odległość $\text{dist}(x, A)$ punktu $x = (x_1, x_2, \dots)$ od zbioru $A = \{(t, s, 2s, 0, 0, \dots) : t, s \in \mathbb{R}\} \subset l^2$.

10. Znaleźć taki wielomian $w(t)$ stopnia co najwyżej 2, że wartość

$$\int_0^1 (t^3 - w(t))^2 dt$$

jest najmniejsza.

11. Niech $X = \{f \in L^2(0, 1) : f|_{(0, \frac{1}{2}]} \equiv 0\} \subset L^2(0, 1)$. Znaleźć $X^\perp$ i rzut ortogonalny na X .

12. Obliczyć

$$\min_{a, b, c \in \mathbb{R}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{3}} (t - a)^2 dt + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (t - b)^2 dt + \int_{\frac{2}{3}}^1 (t - c)^2 dt \right\}.$$

Zadania dla MEK 4

13. Dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ niech

$$A(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_2 - x_1}{2} \right).$$

Wyznaczyć normę operatora liniowego A pomiędzy wskazanymi przestrzeniami:

- a) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$,
- b) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$,
- c) $A : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

14. Obliczyć normę operatora $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ określonego wzorem

$$(Af)(t) = \int_0^1 tsf(s)ds,$$

gdzie $f \in L^2(0, 1)$, $t \in (0, 1)$.

15. Pokazać, że operator $A : c_0 \rightarrow c_0$ określony wzorem

$$Ax = \left(\frac{1}{n}x_n \right),$$

gdzie $x = (x_n) \in c_0$, jest ograniczony, ale nie jest otwarty.

16. Pokazać, że operator $A : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ określony wzorem

$$(Af)(t) = f'(t),$$

gdzie $f \in C^1([0, 1])$, $t \in [0, 1]$, jest liniowy, lecz nie jest ograniczony. Normą w przestrzeniach $C^1([0, 1])$ i $C([0, 1])$ jest norma supremum.