

Zad.1. Wyznaczyć pochodne funkcji:

a)  $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$ , b)  $y = \ln\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right)$ , c)  $y = e^{\sin x} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{x}}$ , d)  $y = \ln \sqrt{\cos x}$ ,  
e)  $y = \arccos(2x^2 + 3x) + \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ , f)  $y = \ln \frac{x+1}{x-1} - \ln(\ln x)$ .

Zad.2. Wyznaczyć drugie pochodne funkcji:

a)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x$ , b)  $y = (x^3 - 2)^{15}$ , c)  $y = x^2(2 \ln x - 3)$ , d)  $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ .

Zad.3. Obliczyć granice:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n + 5} - 2n)$ , b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{25n^4 + 6n + 4} - 5n^2)$ ,  
c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+6}{2n^2+4}\right)^{3n^2-5}$ , d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+3}{n^2+n+1}\right)^{n^2+4}$ , e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+6}{4n+1}\right)^{n+8}$ .

Zad.4. Zbadać monotoniczność funkcji:

a)  $f(x) = (x^3 - 3x^2)e^x$ ,  
b)  $f(x) = x^3 - 24 \ln x$ ,  
c)  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

Zad.5. Zbadać monotoniczność i wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a)  $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ , b)  $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x+4}$ .

Zad.6. Zbadać wypukłość i wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji:

a)  $f(x) = x^2(3 + 2 \ln x)$ , b)  $f(x) = e^{2x-x^2}$ .

Zad.7. Zbadać monotoniczność, wypukłość, wyznaczyć ekstrema lokalne oraz punkty przegięcia funkcji  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

Zad.8. Obliczyć granice, korzystając z twierdzenia de L'Hospitala:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+6x}-1}{x}$ , b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi-2x)^2}$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$ , d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}+e^{-3x}-2}{x^2}$ ,  
e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x-1}{7x^2}$ , f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\sin x - x}$ , g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$ , h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1+\sin(2x-2)-x^2}$ .

Zad.9. Wyznaczyć asymptoty funkcji:

a)  $f(x) = \frac{3x}{x-1} + 3x$ , b)  $f(x) = \frac{-3x+1}{x^2-1}$ , c)  $f(x) = \frac{x^4}{x^3-8}$ .

Zad.10. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  w jej punkcie przegięcia.

Zad.11. Obliczyć całki:

$\int (4x+3) \cos 2x dx$ ,  $\int (5x-7)e^{7x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+16}}$ ,  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-36}}$ ,  $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x+10}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2}}$ ,  
 $\int \frac{(4x+11)dx}{x^2+12x+100}$ ,  $\int_1^e x^6 \ln x dx$ ,  $\int \frac{(6x^2+4x+2)dx}{x^2+3x+2}$ ,  $\int \frac{(x^2+\sqrt{2+x})dx}{\sqrt[3]{2+x}}$ ,  
 $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$ ,  $\int_0^1 (2x+7)e^{6x} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+4}$ ,  $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+10x+50}$ ,  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$ ,  
 $\int (15x+7)e^{2x-4} dx$ ,  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x}$ ,  $\int_0^4 \frac{x^2+18}{x^2+16} dx$ ,  $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ ,  $\int \frac{(10x+2)dx}{\sqrt{x^2+6x+4}}$ ,  $\int \frac{x^2 dx}{x^2+4x+20}$ ,  
 $\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x + \cos^2 x) dx$ ,  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ ,  $\int_2^4 \frac{(x-1)dx}{x+1}$ ,  $\int \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$ ,  $\int \frac{(4x+6)dx}{\sqrt{-x^2+5x+4}}$ ,  
 $\int \frac{2x+8}{(x+1)(x^2-x)} dx$ ,  $\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-x^2+2x+5}}$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$ ,  $\int \frac{3x-1}{x^2+10x+29} dx$ .

Zad.12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego:

a) łukami parabol  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$  i prostą  $y = 4x$ ,  
b) liniami  $y = 4x + x^2$  i  $x - y + 4 = 0$ .

Zad.13. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi  $Ox$  krzywej:

a)  $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ , gdzie  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ ,  
b)  $f(x) = \sqrt{x}e^{-2x}$ , gdzie  $x \in \langle 0, 2 \rangle$ .

Zad.14. Obliczyć długość krzywej:

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ ,  $x \in \langle 1, 2 \rangle$ , b)  $f(x) = \ln(1-x^2)$ ,  $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ .