

1. Metodą Gaussa z wyborem elementu podstawowego w kolumnie rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

2. Metodą eliminacji Gaussa z wyborem elementu podstawowego (głównego) w kolumnie obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

3. Metodą  $LU$  rozkładu rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

4. Metodą eliminacji (dla układów z macierzą trójdagonalną) rozwiązać układ liniowych równań

$$\begin{cases} -c_0x_0 + b_0x_1 & = b_1, \\ a_1x_0 - c_1x_1 + b_1x_2 & = b_2, \\ & a_2x_1 - c_2x_2 + b_2x_3 = b_3, \\ & & a_3x_2 - c_3x_3 = b_4. \end{cases}$$

5. Pokazać, że równanie  $f(x)=0$  ma jeden pierwiastek w przedziale  $\langle a;b \rangle$ . Metodą Newtona znaleźć ten pierwiastek. Obliczenia zakończyć, gdy  $|f(x_n)| < 10^{-2}$ .

6. Ile iteracji metodą połowienia należy wykonać, aby obliczyć pierwiastek równania  $f(x)=0$  na przedziale  $\langle a,b \rangle$ , z dokładnością  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

7. Z jaką dokładnością można obliczyć wartość  $f(x^*)$  mając znane wartości  $\{f(x_0); f(x_1); f(x_2)\}$ , wykorzystując interpolację wielomianem drugiego stopnia.

8. Obliczyć wartość  $f(x^*)$  za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a dla funkcji  $f(x)$  i węzłów interpolacji:  $x_0; x_1; x_2$ . Oszacować błąd.

9. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji zadanej za pomocą tablicy wartości

|          |  |  |  |  |
|----------|--|--|--|--|
| $x_i$    |  |  |  |  |
| $f(x_i)$ |  |  |  |  |

10. Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji zadanej za pomocą tablicy wartości

|          |  |  |  |  |
|----------|--|--|--|--|
| $x_i$    |  |  |  |  |
| $f(x_i)$ |  |  |  |  |

11. Niech  $f(x)$ , a  $L_2(x)$  jest wielomianem interpolacyjnym Newtona drugiego stopnia, wartości którego w punktach  $x = 0; 0,1; 0,2$  są równe odpowiednim wartościom funkcji  $f(x)$ . Oszacować błąd wielomianu interpolacyjnego. Porównać to oszacowanie z błędem faktycznym w punkcie  $x = 0,05$ .

12. Metodą najmniejszych kwadratów dla funkcji podanej w tabeli

|       |  |  |  |  |
|-------|--|--|--|--|
| $x_i$ |  |  |  |  |
| $y_i$ |  |  |  |  |

znaleźć wielomiany liniowy.

13. Jakiej wielkości ma być krok  $h$  przy zastosowaniu wzoru złożonego Simpsona dla obliczenia

całki  $\int_a^b f(x)dx$ , aby błąd nie przekraczał  $10^{-6}$ ?

14. Obliczyć  $\int_a^b f(x)dx$  za pomocą złożonego wzoru trapezów przyjmując  $N=10$  oraz oszacować błąd.

15. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$u' = f(t, u), \quad t \in \langle t_0, T \rangle, \quad u(t_0) = u_0$$

wykorzystując metodę Rungiego-Kutty

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + \tau, y_n + \tau k_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2)$$

dla  $\tau = 0,1$ .

16. Udowodnić, że metoda Rungiego-Kutty

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f(t_n + c_2 \tau, y_n + a_{21} \tau k_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau(b_1 k_1 + b_2 k_2).$$

rozwiązania zagadnienia początkowego  $u' = f(t, u)$ ,  $u(t_0) = u_0$  ma drugi rząd aproksymacji.

17. Wykazać, że metoda

$$\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \alpha_2 y_{n-1} = \tau(\beta_1 f(t_n, y_n) + \beta_2 f(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

rozwiązania zagadnienia początkowego  $u' = f(t, u)$ ,  $u(t_0) = u_0$  ma trzeci rząd aproksymacji.

18. Zbadać stabilność metody

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{\tau}{2}(\beta_0 f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(t_n, y_n) + \beta_2 f(t_{n-1}, y_{n-1})).$$

19. Zbadać stabilność metody

$$\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \alpha_2 y_{n-1} = \tau(\beta_0 f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(t_n, y_n) + \beta_2 f(t_{n-1}, y_{n-1})).$$