

1. Rozważmy ciąg zbudowany następująco: $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ i tak dalej w nieskończoność. Można wymyślić wzór ogólny na wyraz tego ciągu albo posłużyć się wiadomościami z ciągów geometrycznych. Otrzymamy wzór

$$a_n = (-1)^{n-1}.$$

Ale także wzór $a_n = -\cos(n\pi)$ opisuje ten sam ciąg dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Proszę wymyślić albo przypomnieć ze szkoły i podać wzory ogólne dla następujących ciągów:

- a) $(2, 0, 2, 0, 2, \dots)$
- b) $(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$
- c) $(5, 1, -3, -7, \dots)$
- d) $(-2, 4, -8, 16, -32, \dots)$
- e) $(4, 2, 6, -2, 14, -18, 46, \dots)$
- f)* $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots)$

2. Uzasadnić na podstawie definicji, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 - 1} = 1.$$

Wskazówka: wykorzystać tzw. aksjomat Archimedesza mówiący, że dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba naturalna od niej większa.

3. Wykazać na podstawie definicji granicy ciągu, że $n \rightarrow \infty$.

5. Zbadać monotoniczność ciągów. Wskazać także te ciągi, które są monotoniczne "od pewnego miejsca", tzn. istnieje takie k , że dla $n \geq k$ zachodzi np. $a_{n+1} \leq a_n$:

- a) $a_n = \frac{n-1}{2^n},$
- b) $a_n = \frac{n+2}{3n+1}$
- c) $a_n = \frac{100^n}{n!}.$

6. Na podstawie poznanych twierdzeń wyznaczyć granice ciągów:

a) $n^2 - n \sin n$,

b) $n^2 - \sqrt{n^4 + 2n^2}$,

c) $n^2 - \sqrt{n^5 + 2}$,

d) $\frac{4n^2 - 3n + 2}{3n^2 - 5n - 1}$,

e) n^n ,

f) $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

g) $\frac{40n^2 - 2^n + 2}{2^{n+2} - 5n - 1}$

h) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

i) $\left(\frac{n^2+1}{n^2+4n}\right)^n$

7. Wykazać, że ciągi $a_n = (-2)^n$ oraz $b_n = (-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ nie mają granicy.

8. Wyznaczyć granice ciągów, korzystając z twierdzenia o 3 ciągach:

a) $\sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$,

b) $\sqrt[n]{4^n - 3^n}$,

c) $\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

d) $\sqrt[n]{3^n + 2013n}$

9. Obliczyć granice funkcji, lub wykazać, że nie istnieją:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 - 3x + 2}{12x^3 - 35x^2 + 33x - 10}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 - 3}{12x^3 - 35x^2 + 33x - 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \pi} x \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$\text{j) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 14}{x^5 - 5x^3 + 13x - 10}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{12x^4 - 35x^2 + 33x - 10}$$

$$\text{l) } \lim_{x \rightarrow 0.5\pi} \frac{\sin(\cos x)}{\cos(x + \pi)}$$